

Двойное отношение

10 июля

Опр. Простым отношением трёх точек A, B, C , лежащих на одной прямой, называется отношение длин (направленных) отрезков

$$(AB; C) = \frac{AC}{CB}.$$

Оно положительно, если отрезки сонаправлены, и отрицательно, если противоположны.

I. (а) На прямой даны точки A и B . Исследуйте, где находится точка C , для которой простое отношение $(AB; C)$ равно

$$-\frac{99}{100}, \quad -\frac{1}{3}, \quad 0, \quad 1, \quad 100, \quad 10^{10}, \quad -100, \quad -3, \quad -\frac{101}{100} ?$$

(б) Почему для бесконечно удалённой точки C на прямой AB естественно считать, что $(AB; C) = -1$?

Опр. Двойным отношением четвёрки точек A, B, C, D , лежащих на одной прямой, называют число

$$(AB; CD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{(AB; C)}{(AB; D)}.$$

II. Как по отношению к AB могут располагаться точки C и D , если двойное отношение $(AB; CD)$ больше 1? От 0 до 1? Отрицательно?

III. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой, а точка O на ней не лежит. Докажите, что:

(а) Докажите, что

$$(AB; CD) = \frac{\sin(AOC)}{\sin(COB)} : \frac{\sin(AOD)}{\sin(DOB)}.$$

(б) Изменится ли это равенство, если точка A — бесконечно удалённая?

(в) Докажите, что двойное отношение четвёрки точек, лежащих на одной прямой, сохраняется при центральном проектировании.

(г) Даны три точки на прямой. Докажите, что их простое отношение сохраняется при центральном проектировании только в том случае, если бесконечно удалённая точка на данной прямой переходит в бесконечно удалённую.

Опр. Четвёрка A, B, C, D , для которой $(AB; CD) = -1$, называется гармонической.

1. (а) Пусть точки O, A, B на прямой l имеют координаты $0, a$ и b соответственно. Докажите, что существует единственная точка C такая, что $(AB; OC) = -1$, и её координата равна среднему гармоническому a и b .
- (б) На диаметре AB окружности ω выбрана точка P . Точка P' инверсна ей относительно ω . Докажите, что $(AB; PP') = -1$.
- (в) Пусть внутренние касательные окружностей ω_1 и ω_2 пересекаются в точке X , а внешние — в точке Y . Докажите, что центры окружностей и точки X, Y образуют гармоническую четвёрку.
2. (а) В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке D . Докажите, что четвёрка A, B, C_1, D — гармоническая.
- (б) Пусть в треугольнике ABC биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B пересекают прямую AC в точках M и N . Докажите, что $(AC; MN) = -1$.
3. Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке A . На прямой l_1 выбраны точки B_1, C_1, D_1 , а на l_2 — точки B_2, C_2, D_2 . Оказалось, что $(AB_1; C_1D_1) = (AB_2; C_2D_2)$. Докажите, что прямые B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 пересекаются в одной точке, либо параллельны.
4. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , а продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках E и F . Через точку O проведена прямая, параллельная EF и пересекающая противоположные стороны четырёхугольника в точках X и Y . Докажите, что точка O делит отрезок XY пополам.
5. Точка P — основание внутренней биссектрисы угла C треугольника ABC , а точка Q — внешней. Точка M — середина стороны BC . Прямые PM и AC пересекаются в точке X . Докажите, что $QX = CX$.
6. Дан прямоугольник $ABCD$. На продолжении стороны CD за точку D отмечена точка P . Пусть M и N — середины сторон AD и BC соответственно. Прямые PM и AC пересекаются в точке Q . Докажите, что NM — биссектриса угла PNQ .
7. Даны треугольник ABC и прямая l . Обозначим через A_1, B_1, C_1 середины отрезков, отсекаемых на прямой l углами A, B, C , а через A_2, B_2, C_2 — точки пересечения прямых AA_1 и BC, BB_1 и AC, CC_1 и AB . Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.